10. Séries de Taylor: contínuação

Lembrete 10.0.1 Lembra que $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x) - T_n(x)$ é dito erro ou resto da série de Taylor. Além disso, temos que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x-a)^n}{n!}, \quad x \in (a-R, a+R),$$

se e somente se $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ para $x \in (a-R, a+R)$.

Pergunta: Como estimar $R_n(x)$?

A resposta pode ser encontrada com ajuda de

Teorema 10.0.2 — de Taylor com resto de Lagrange. Seja f uma função $(n+1)$ vezes derivável em $(x_0 - h, x_0 + h) = I$, então para cada $x \neq x_0 \in I$ existe $\bar{x}$ entre x_0 e x tal que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

onde $\dfrac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ é o *resto de Lagrange*.

Corolario 10.0.3 Se $|f^{(n+1)}(x)| < M$ para $|x - x_0| < \varepsilon \leq h$, logo

$$|R_n(x)| < \frac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{M \cdot \varepsilon^{n+1}}{(n+1)!},$$

isto é, obtemos a estimativa útil para o resto da série de Taylor, que pode ser usada para provar convergência da série de Taylor à própria função.

■ **Exemplo 10.1** Mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c^n}{n!} = 0$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{c^n}{n!}$ converge pela Teste de razão. De fato

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{c^n}\right| = c \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Assim $x_n = \dfrac{c^n}{n!} \to 0$ quando $n \to \infty$ (pelo Teste de termo geral).

■ **Exemplo 10.2** Mostre, que $f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução. Mostremos que $R_n(x) \to 0$, para $x \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema 10.0.2, temos

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x-0)^{n+1} = \frac{e^{\bar{x}} x^{n+1}}{(n+1)!},$$

com $\bar{x}$ entre 0 e x, ou $|\bar{x}| < |x|$. Assim,

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^{\bar{x}} x^{n+1}}{(n+1)!}\right| < \frac{e^{|x|} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

quando $n \to \infty$, para todo $x \in \mathbb{R}$ (veja Exemplo 10.1). ;-)

■ **Exemplo 10.3** Ache o número e com o erro inferior a 10^{-4}.

Solução. Sabemos

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

Assim

$$e^1 = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Para $x = 1$,

$$|R_n(1)| = \left|\frac{e^{\bar{x}} \cdot 1^{n+1}}{(n+1)!}\right| < \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Basta procurar n tal que $\dfrac{3}{(n+1)!} < \dfrac{1}{10^4}$ ou seja $(n+1)! > 3 \cdot 10^4$. Última desigualdade vale a partir $(n+1)! = 8!$ ou seja $n = 7$. Logo

$$e \approx 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$$

com o erro inferior a 10^{-4}. ;-)

■ **Exemplo 10.4** Ache a série de Taylor de e^x em $x = 4$. ■

Solução. $f^{(n)}(x) = e^x, f^{(n)}(4) = e^4$, assim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^4(x-4)^n}{n!},$$

é a série de Taylor de e^x com $x = 4$. Vamos mostrar que o intervalo de convergência é $I = \mathbb{R}$. Isto é

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^4(x-4)^n}{n!} = e^x, \tag{10.1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Existe $\bar{x}$ tal que $|\bar{x}-4| < |x-4|$ e

$$|R_n(x)| = \Big|\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})(x-4)^{n+1}}{(n+1)!}\Big| < \frac{e^{\bar{x}}|x-4|^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^{\max\{x,4\}}|x-4|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

A última fração tende a 0 pelo Exemplo 10.1. Portanto (10.1) vale para todo $x \in \mathbb{R}$. ;-)

■ **Exemplo 10.5** Ache a série de Maclaurin para $f(x) = \operatorname{sen} x$.

Solução.

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x \Rightarrow f(0) = 0; f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 0; \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x \Rightarrow f''(0) = 0; \quad f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f'''(0) = -1; \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x = f(x). \end{aligned}$$

Portanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Agora vamos mostrar que que o intervalo de convergência é $I = \mathbb{R}$. Existe $\bar{x}$ tal que $|\bar{x}| < |x|$ e

$$|R_n(x)| = \Big|\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})x^{n+1}}{(n+1)!}\Big| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ (como } |f^{(n)}(\bar{x})| \le 1)$$

que tende a 0 pelo Exemplo 10.1. Logo

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

em todo $x \in \mathbb{R}$. ;-)

■ **Exemplo 10.6** Ache a série de Maclaurin para $f(x) = \cos x$.

Solução.

$$\cos x = (\operatorname{sen} x)' = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0) x^n}{n!},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

;-)

■ **Exemplo 10.7** Ache $\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^p}$, $p \in \mathbb{R}$.

Solução. Temos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^p} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\big(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\big) - x}{x^p} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots}{x^p} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \dots}{x^{p-3}} = \begin{cases} -\frac{1}{3}, & p = 3, \\ 0, & p < 3, \\ -\infty, & p > 3. \end{cases}$$

;-)

■ **Exemplo 10.8** Ache sen 1 com erro inferior a 10^{-5}.

Solução. Temos que $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular,

$$\operatorname{sen} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!},$$

é uma série alternada. Lembra-se:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n, \Rightarrow |R_n| = |S - S_n| < x_{n+1},$$

onde S_n é a soma parcial. Portanto

$$|R_n| = \Big|\operatorname{sen} 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\Big| < \frac{1}{(2n+3)!} < \frac{1}{10^5}$$

se e somente se

$$(2n+3)! > 10^5,$$

que vale a partir de $(2n+3)! = 9!$ ou $n = 3$. Logo

$$\operatorname{sen} 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots.$$

;-)

■ **Exemplo 10.9** Ache a série de Maclaurin de função $f(x) = \ln(1-2x^4)$.

Solução. Sabemos que

$$\ln(1-y) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1}, \quad y \in [-1,1).$$

De fato,

$$\ln(1-y) = -\int \frac{1}{1-y} dx = \int -\sum_{n=0}^{\infty} y^n dy = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n+1} + C.$$

Como $\ln(0-1) = 0 + C$, obtemos $C = 0$. Agora se $y = -1$, série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$ converge e se $y = 1$, série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{n+1}$ diverge

Seja $y = 2x^4$, então

$$\ln(1-2x^4) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x^4)^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n+1} x^{4n+4},$$

para $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ (mostre que o intervalo deve ser aberto!). ;-)

■ **Exemplo 10.10** Ache a sériede Maclaurin da função $f(x) = \cos^2 x$.

■ **Exemplo 10.11** Temos que

$$(\cos^2 x)' = -2\cos x \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2x).$$

Por outro lado

$$\operatorname{sen} y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ y \in \mathbb{R}.$$

Seja $y = 2x$, assim

$$(\cos^2 x)' = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$\cos^2 x = \int (\cos^2 x)' dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} + C;$$

Como $\cos^2(0) = 1 = 0 + C$, temos que $C = 1$. Portanto

$$\cos^2 x = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

■ **Exemplo 10.12** Ache a série de Maclaurin da função $f(x) = \int e^{-x^2} dx$.

Solução. Sabemos que

$$e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}, \quad y \in \mathbb{R},$$

e se $y = -x^2$, obtemos

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}.$$

Portanto

$$\int e^{-x^2} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

;-)

■ **Exemplo 10.13** Encontre a soma da série:

1)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^4)^n}{n!} = \{-x^4 = y\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y = e^{-x^4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n}}{6^{2n}(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{6}\right)^{2n}}{(2n)!} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

■ **Exemplo 10.14** Seja

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{3x} - 1}{x}, \ x \neq 0, \\ 3, \ x = 0 \end{cases}.$$

Desenvolve $\int_0^{1/6} f(x) dx$ numa série numérica.

Solução. Temos $e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$, se $y \in \mathbb{R}$. Logo

$$e^{3x} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}.$$

Agora

$$\frac{e^{3x} - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{n-1}}{n!}, \quad x \neq 0$$

e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^{n-1}}{n!} = 3$ se $x = 0$.

$$\int_0^{1/6} f(x) dx = \int_0^{1/6} \frac{3^n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n \cdot n!}\Big|_0^{1/6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (1/6)^n}{n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n \cdot n!}.$$

;-)

■ **Exemplo 10.15** Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+2x^3}$. Ache $f^{(30)}(0)$.

Solução.

$$\frac{1}{1+2x^3} = \frac{1}{1-(-2x^3)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-2x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Sabemos que $c_{3n} = (-1)^n 2^n = \dfrac{f^{(3n)}(0)}{(3n)!}$. Portanto

$$c_{30} = (-1)^{10} \cdot 2^{10} = \frac{f^{(30)}(0)}{30!},$$

então $f^{(30)}(0) = 30! \cdot 2^{10}$. ;-)